

## Игровые стратегии

Как вы уже знаете из § 6, игровые модели — это модели, которые описывают соперничество двух (или более) сторон, каждая из которых стремится к выигрышу, т. е. преследует свою цель. Часто цели участников противоречивы — выигрыш одного означает проигрыш других.

Построением и изучением игровых моделей занимается теория игр — раздел прикладной математики. Задача состоит в том, чтобы найти стратегию (алгоритм игры), который позволит тому или другому участнику получить наибольший выигрыш (или, по крайней мере, наименьший проигрыш) в предположении, что соперники играют безошибочно.

Во многих простых играх, в которых игроки ходят по очереди, есть не так много вариантов развития событий, и их можно рассмотреть полностью, однозначно определив, кто выиграет в заданной начальной ситуации, если оба соперника не будут ошибаться.

Все позиции (игровые ситуации) делятся на выигрышные и проигрышные. **Выигрышная позиция** — это такая позиция, в которой игрок, делающий первый ход, может гарантированно выиграть при любой игре соперника, если сам не сделает ошибку. При этом говорят, что у него есть **выигрышная стратегия** — алгоритм выбора очередного хода, позволяющий ему выиграть.

Если игрок начинает играть в **проигрышной** позиции, он обязательно проиграет, если ошибку не сделает его соперник. В этом случае говорят, что у него нет выигрышной стратегии. Таким образом, общая стратегия игры состоит в том, чтобы своим ходом создать проигрышную позицию для соперника.

Выигрышные и проигрышные позиции можно охарактеризовать так:

- позиция, из которой все возможные ходы ведут в выигрышные позиции, — *проигрышная*;
- позиция, из которой хотя бы один из возможных ходов ведёт в проигрышную позицию, — *выигрышная*, при этом стратегия игрока состоит в том, чтобы перевести игру в эту проигрышную (для соперника) позицию.

Для примера рассмотрим игру с камнями, в которой участвуют два игрока. Вначале перед игроками лежит куча из некоторого количества камней (обозначим его  $S$ ). За один ход игрок может добавить в кучу один камень (ход «+1») или увеличить количество камней в куче в два раза (ход «\*2»). Например, имея кучу из 5 камней, за один ход можно получить кучу из 6 или 10 камней. У каждого игрока есть неограниченное количество камней. Победителем считается игрок, первым получивший кучу, в которой 14 камней или больше.

Рассмотрим возможный результат игры при разном начальном количестве  $S$  камней в куче. Очевидно, что при  $S > 6$  первый игрок (т. е. игрок, делающий первый ход) выигрывает сразу, удвоив число камней в куче. Начнём заполнять таблицу, в которой для каждого значения  $S$  будем указывать, выигрышная это позиция или проигрышная, и через сколько ходов завершается игра:

$S$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
							$B_1$	$B_1$	$B_1$	$B_1$	$B_1$	$B_1$	$B_1$

Здесь « $B_1$ » обозначает выигрыш за один ход.

При  $S = 6$  у первого игрока есть два хода: ход «+1» даёт кучу из 7 камней, а ход «\*2» — кучу из 12 камней. Выиграть за один ход он не может, оба возможных хода ведут в выигрышные (для второго!) позиции, поэтому первый игрок проиграет, если второй не ошибётся. Позицию  $S = 6$  отметим в таблице как « $x_1$ » (проигрыш за 1 ход):

$S$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
						$x_1$	$B_1$	$B_1$	$B_1$	$B_1$	$B_1$	$B_1$	$B_1$

Вспомним, что задача игрока — перевести игру в проигрышную для соперника позицию. Если  $S = 5$  или  $S = 3$ , первый игрок может получить (ходом «+1» или «\*2» соответственно) кучу из 6 камней, т. е. создать проигрышную позицию. Этого достаточно для выигрыша, но выиграть можно только за 2 хода:

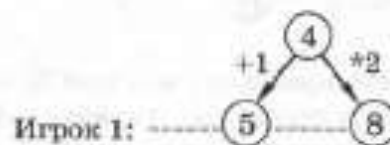
$S$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
			$B_2$		$B_2$	$x_1$	$B_1$	$B_1$	$B_1$	$B_1$	$B_1$	$B_1$	$B_1$

Рассуждая аналогично, выясняем, что позиция  $S = 4$  — проигрышная, так как возможные ходы ведут в выигрышные позиции (соперник выиграет за 1 или за 2 хода). При  $S = 2$  первый игрок может своим ходом «\*2» перевести игру в проигрышную позицию ( $S = 4$ ), поэтому он выиграет. А при  $S = 1$  он проиграет, потому что может своим ходом получить только кучу из 2 камней:

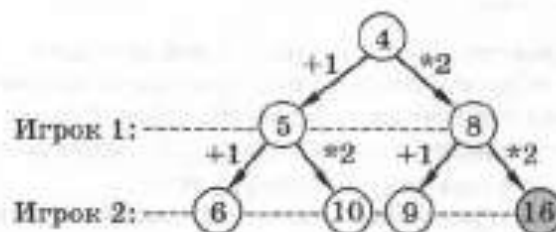
$S$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	$x_1$	$B_2$	$B_2$	$x_2$	$B_2$	$x_1$	$B_1$	$B_1$	$B_1$	$B_1$	$B_1$	$B_1$	$B_1$

Полученная таблица показывает результат игры первого игрока в том случае, если второй не будет ошибаться. Если игра начинается в проигрышной позиции, первый игрок проиграет, а если в выигрышной — его стратегия состоит в том, чтобы на каждом шаге своим ходом создавать проигрышную позицию для соперника.

Для полного исследования всех вариантов игры можно построить дерево, содержащее все возможные ходы. Предположим, что сначала в куче 4 камня (эта позиция будет корнем дерева). Тогда в результате первого хода может получиться куча из 5 или 8 камней:



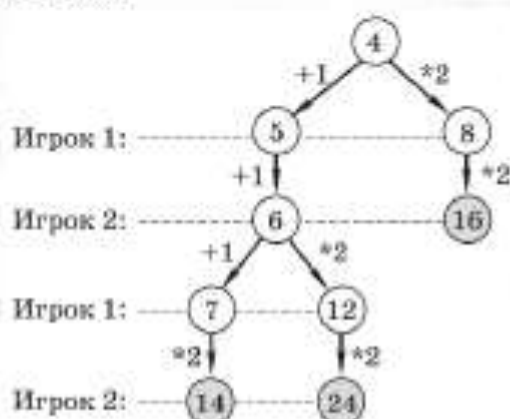
Следующий уровень дерева показывает все возможные позиции после ответного хода второго игрока:



Мы видим, что второй игрок может выиграть своим первым ходом (получив 16 камней), если первый построит кучу из 8 камней. В остальных случаях игра продолжается, и дерево можно строить дальше по тому же принципу.



Как мы уже показали ранее с помощью таблицы, при  $S = 4$  выигрывает второй игрок. Чтобы доказать это с помощью дерева, не нужно строить полное дерево игры. Достаточно рассмотреть все возможные ходы соперника и для каждого из них найти один (!) выигрышный ход второго игрока. Вариант с выигрышем в один ход мы уже разобрали, теперь посмотрим, что произойдет, если первый игрок получит кучу из 5 камней. Как следует из построенной выше таблицы, для кучи из 5 камней выигрышный ход второго игрока —  $*+1*$ , он переводит игру в проигрышную позицию. При любом ответе первого игрока второй выигрывает своим вторым ходом  $*+2*$ :



Таким образом, мы доказали, что при  $S = 4$  у второго игрока есть стратегия, позволяющая ему гарантированно выиграть, по крайней мере, за 2 хода.

