§ 7
Системный подход в моделировании

Как вы знаете из § 4, системный подход состоит в том, что объект исследования (моделирования) рассматривается как система с учётом всех взаимосвязей между ее частями.

Модели могут обладать свойством системности, а могут не обладать. В таблице 2.1 приведены примеры моделей-«несистем» и моделей-систем для одних и тех же объектов.

Таблица 2.1

Оригинал	Модель-«несистема»	Модель-система
Пос. Орехово	Фотографии	Карта, видеофильм
Метро	Список станций	Схема метро
Рыбы в озере	Независимые модели развития щук и карасей	Модель, учитывающая, что щуки едят карасей
Автомобиль	Чертежи отдельных деталей	Сборочный чертёж
Солнечная система	Независимое движение планет	Движение планет под действием сил всемирного тяготения

Поскольку модель-система состоит из отдельных компонентов и связей между ними, можно говорить о структуре модели, т. е. о том, как именно связаны её компоненты. Далее мы рассмотрим наиболее важные структуры моделей-систем.

Табличные модели

Табличные модели используются тогда, когда нужно в наглядной форме представить **информацию об объектах**, имеющих одинаковый набор свойств (таблица типа **«объект–свойства»**) (табл. 2.2).

Таблица 2.2

Фамилия	Имя	Год рождения	Место отдыха
Иванов	Кузьма	1955	о. Валаам
Кузьмин	Сидор	1978	о. Ольхон
Сидоров	Иван	1990	о. Кипр

В виде таблиц оформляются расписания (уроков, поездов, самолётов), статистические данные (например, сколько произведено чугуна и стали на душу населения в разных странах). Функция тоже может быть задана в виде таблицы. С помощью таблицы Менделеева устанавливается связь между свойствами химического элемента и зарядом атомного ядра.

Таблица может определять **отношения между объектами** (таблица типа **«объект–объект»**). Например, в табл. 2.3 показано, кто в каком городе живёт.

Таблица 2.3

	Вася	Петя	Коля	Маша	Даша	Глаша
Москва	✓				✓	
Санкт-Петербург		✓		✓		
Пермь			✓			✓

Таблицы — это основной способ хранения информации в базах данных. Кроме того, для обработки табличных данных предназначены специальные программы — табличные процессоры.

В учебнике для 10 класса было показано, как таблицы можно использовать при решении логических задач. Здесь мы рассмотрим ещё один тип задач, который требует анализа табличных данных: определение оптимального маршрута поездки.

Задача. Путешественник прибыл в посёлок Берёзовое в 8 утра по местному времени и увидел следующее расписание автобусов (табл. 2.4).

Таблица 2.4

Отправление из	Прибытие в	Время отправления	Время прибытия
Берёзовое	Лесное	07:30	10:00
Берёзовое	Осиновое	11:50	14:10
Лесное	Березовое	12:50	15:20
Полевое	Лесное	13:20	14:40
Осиновое	Полевое	14:00	17:15
Лесное	Осиновое	14:20	15:30
Осиновое	Лесное	14:40	15:50
Берёзовое	Полевое	16:00	17:50
Лесное	Полевое	16:10	17:30
Полевое	Осиновое	17:40	19:55

Определите самое раннее время, когда он может попасть в Полевое, и как ему нужно ехать.

Решение. Из расписания видно, что автобусы ходят между четырьмя населёнными пунктами. Нарисуем схему, показывающую все возможные способы переезда из посёлка Берёзовое в посёлок Полевое. Буквы в кружках обозначают посёлки (Б — Берёзовое, П — Полевое, Л — Лесное и О — Осиновое), а слева и справа от них записано время отправления и прибытия автобусов согласно расписанию (рис. 2.2).

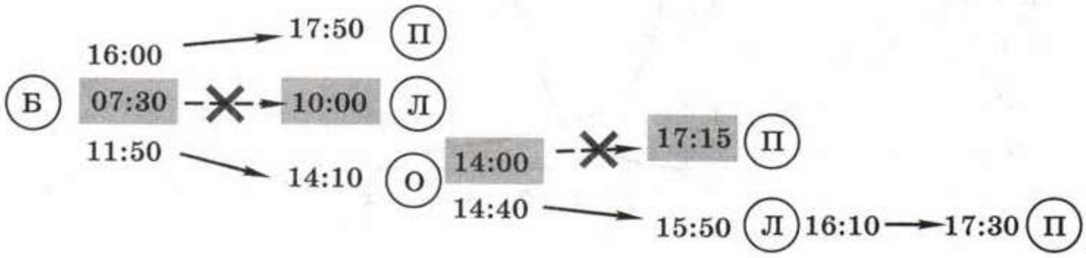


Рис. 2.2

Штриховыми линиями обозначены маршруты, на которые путешественник не успевает (поэтому дальнейшие варианты мы даже не рассматривали). Действительно, когда он приехал в Берёзовое в 8 утра, автобус в Лесное уже ушёл (в 7:30). Приехав в Осиновое в 14:10, он не успеет на автобус в Полевое, уходящий в 14:00.

Таким образом, остаются два варианта: ждать прямого автобуса в Полевое (прибытие в 17:50) или ехать с двумя пересадками через Осиновое и Лесное (прибытие в 17:30). Второй вариант позволяет доехать немного раньше.

Диаграммы

Воспринимая числовые данные, человек вынужден в уме анализировать эту информацию и делать выводы. Это требует значительных усилий, особенно если чисел много. Чтобы облегчить восприятие информации, её представляют в виде диаграмм (греч. διαγραμμα — рисунок, чертёж) — графических моделей, построенных по числовым данным, которые часто хранятся в таблицах.

Диаграммы позволяют быстро сравнить значения, увидеть изменения, сделать выводы на основании большого количества данных.

Первыми диаграммами, с которыми вы работали на уроках математики, были графики функций. По горизонтальной оси откладываются значения аргумента, а по вертикальной — значения функции (рис. 2.3).

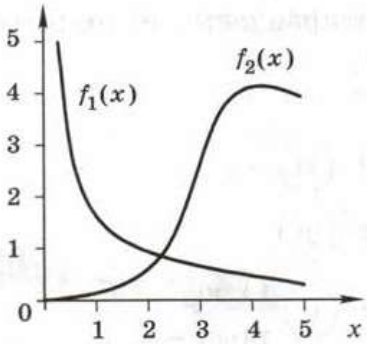


Рис. 2.3

Рассмотрим таблицу, в которой записано количество разных домашних животных у трёх жителей деревни (табл. 2.5).

Таблица 2.5

	Овцы	Кролики	Куры
Аськин	1	2	5
Баськин	4	2	5
Сенькин	2	3	4

Чтобы изобразить эти данные, можно использовать **столбчатую диаграмму (гистограмму)** (рис. 2.4).

Рис. 2.4

Здесь на горизонтальной оси откладываются не числа, а заголовки строк (или столбцов) таблицы, они называются **категориями**.

Столбики одного цвета — это **ряд данных**, представляющий столбец таблицы. На этой диаграмме показаны три ряда данных — овцы, кролики и куры. Справа от диаграммы размещена **легенда** — список условных обозначений (цвет столбиков для каждого ряда).

На представленной диаграмме мы можем сразу увидеть ответы на вопросы типа «Каких животных больше всего у Аськина (Баськина, Сенькина)?».

По тем же данным можно построить ещё одну столбчатую диаграмму, у которой ряды данных размещаются не в столбцах, а в строках (рис. 2.5).

Рис. 2.5

По этой диаграмме сразу видно, у кого больше овец (кроликов, кур). Таким образом, по одним данным можно построить разные диаграммы.

Тип диаграммы выбирается так, чтобы было лучше видно то, что хочет показать автор.

Таблицу 2.5 можно немного расширить, посчитав общее количество овец, кроликов и кур, а также общее количество животных у каждого жителя (табл. 2.6).

Таблица 2.6

	Овцы	Кролики	Куры	Всего
Аськин	1	2	5	8
Баськин	4	2	5	11
Сенькин	2	3	4	9
Всего	7	7	14	28

Всего получилось 28 животных, из них 7 овец, 7 кроликов и 14 кур. Чтобы наглядно показать доли составляющих в целом, используют **круговые диаграммы** (рис. 2.6). В данном случае четверть всех животных — овцы, еще четверть — кролики, и оставшаяся половина — куры.

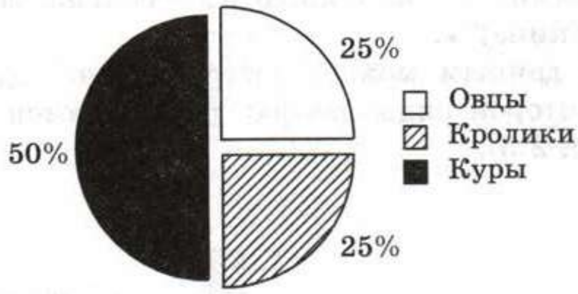


Рис. 2.6

Обратите внимание, что каждая из столбчатых диаграмм содержит ту же самую информацию, что и исходная таблица с данными, а круговая диаграмма — только итоги (по ней исходные данные восстановить невозможно).

Рассмотрим две задачи, в которых нужно анализировать данные, представленные в виде диаграмм.

Задача 1. Биологи пересчитали лосей, белок и зайцев на трёх участках заповедника и построили диаграмму (рис. 2.7).

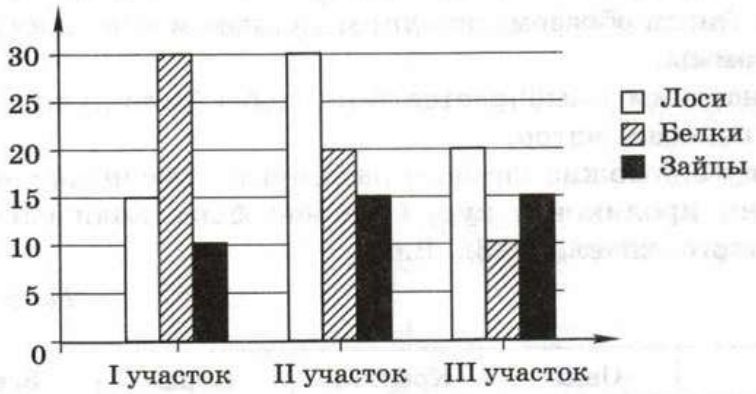


Рис. 2.7

Какая из следующих диаграмм правильно отражает соотношение общего числа животных разных видов по всему заповеднику (рис. 2.8)?

а *б* *в*

Рис. 2.8

Решение. Сначала нужно «снять» данные со столбчатой диаграммы и записать их в таблицу (табл. 2.7).

Таблица 2.7

	Участок I	**Участок II**	**Участок III**
Лоси	15	30	15
Белки	30	20	10
Зайцы	10	15	15

Теперь считаем, сколько было всего животных каждого вида и их общее количество (табл. 2.8).

Таблица 2.8

	Участок I	**Участок II**	**Участок III**	**Всего**
Лоси	15	30	15	60
Белки	30	20	10	60
Зайцы	10	15	15	40
Всего				160

Поскольку было обнаружено по 60 лосей и белок, соответствующие секторы на круговой диаграмме должны быть равны. Этому условию удовлетворяют диаграммы б) и в). Кроме того, количество зайцев составляет четверть от общего числа животных, это условие выполняется для диаграмм а) и б). Таким образом, правильный ответ — б).

Задача 2. В некоторой фирме работают менеджеры, рабочие и охрана. Они ездят на машинах четырёх марок: «Лада», «Форд», «Тойота» и «Ауди», каждый имеет ровно одну машину. На диаграмме (*а*) показано количество работников, имеющих машины определённой марки, а на диаграмме (*б*) — соотношение менеджеров, рабочих и охраны (рис. 2.9).

Рис. 2.9

Какие из этих утверждений следуют из анализа диаграмм:

а) все «Форды» могут принадлежать менеджерам;
б) все охранники могут ездить на «Ауди»;
в) все «Тойоты» могут принадлежать рабочим;
г) все рабочие могут ездить на «Фордах»?

Решение. Сначала по данным диаграммы 1 найдём общее количество работников фирмы:

10 + 40 + 30 + 20 = 100 человек.

Из второй диаграммы следует, что рабочие составляют половину от общего количества, т. е. 50, а менеджеры и охранники — по четверти, т. е. по 25 человек. Теперь рассмотрим предложенные утверждения:

а) все «Форды» (40 штук) не могут принадлежать менеджерам, так как менеджеров только 25, и каждый имеет одну машину;
б) все охранники (25 человек) не могут ездить на «Ауди», потому что этих машин всего 20;
в) все «Тойоты» (30 штук) **могут** принадлежать рабочим (их 50 человек);
г) все рабочие (50 человек) не могут ездить на «Фордах» (их всего 40 штук).

Таким образом, верно только утверждение в).

Иерархические модели

Иерархические модели (деревья) описывают многоуровневую структуру (вспомните материал 10 класса). Это может быть, например, схема управления фирмой, структура организации, классификация животных, файловая система, генеалогическое дерево (родословная) и т. п. Оглавление книги — тоже иерархическая модель (разделы, главы, параграфы, пункты). С помощью дерева можно задать порядок вычисления арифметического или логического выражения. Любую систему, состоящую из подсистем, можно представить в виде иерархии.

Отношения между уровнями могут быть самые разные. Например, в схеме управления — это отношение «подчиняется» (бухгалтер подчиняется директору), в классификации — отношение «подмножество» (подмножествами отряда Хищные являются подотряды Псообразные и Кошкообразные), при описании структуры — отношение «состоит из» (компьютер состоит из процессора, памяти и внешних устройств), в генеалогическом дереве — отношения «сын» («дочь») и «родитель».

В одной из рассмотренных выше задач исходная табличная модель оказалась неудобной для решения проблемы — поиска оптимального маршрута из посёлка Березовое в посёлок Полевое. Поэтому мы построили иерархическую модель (дерево), которая показывает все возможные маршруты. После этого сразу стало ясно, какой маршрут будет наилучшим.

Сетевые модели

В сетевых моделях **(графах)** каждый узел может быть связан со всеми другими. Знакомые вам сетевые модели — это схемы дорог, компьютерных сетей, электрических цепей.

Графы позволяют очень наглядно представить информацию, однако они неудобны для автоматической обработки. Поэтому в памяти компьютера информация о графах обычно хранится в виде табличных моделей — матриц смежности и весовых матриц (вспомните материал учебника для 10 класса).

Сетевые модели широко применяются для планирования производства, есть даже специальный термин «*сетевое планирование*». Предположим, что изготовление аппарата МУХ-8-ККВ включает 8 операций, причём некоторые из них можно выполнять одновременно. Чтобы определить время изготовления, строят схему (граф, сеть), на которой узлы обозначают события (когда можно начинать очередную операцию), дуги — работы, а числа

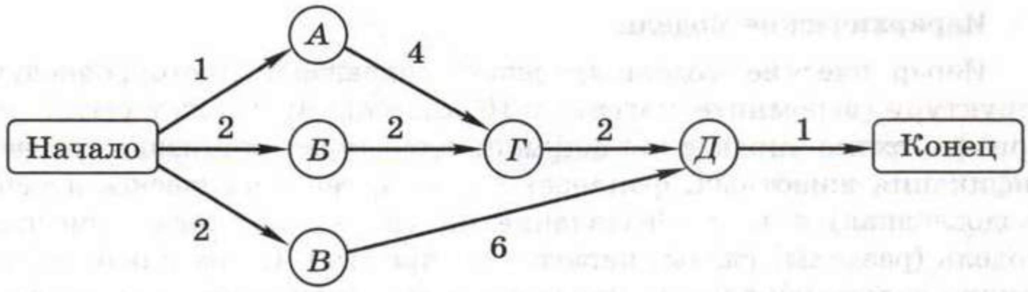


Рис. 2.10

около дуг (веса) — длительность этих работ, например, в днях (рис. 2.10).

По этой схеме видно, что в самом начале можно выполнять три работы параллельно. Чтобы начать работу *Г–Д*, нужно закончить работы *А–Г* и *Б–Г*, на это требуется 5 дней. Чтобы выполнить последнюю операцию и получить готовое изделие, нужно закончить работы *Г–Д* и *В–Д*, на это требуется 8 дней. Поэтому аппарат будет готов только через 9 дней с момента начала работ.

Для представления *знаний* применяют специальные сетевые модели, которые называются **семантическими сетями** (семантика изучает смысл сообщений). В них узлы — это объекты (понятия, процессы, явления), а дуги — связи (отношения) между ними (рис. 2.11).

Рис. 2.11

Семантические сети наглядны, с их помощью удобно анализировать фразы на естественном языке, они соответствуют современным представлениям об организации памяти человека. Однако пока такие структуры плохо приспособлены для автоматической обработки информации и поиска решений.

Сейчас делаются попытки на основе сети Интернет создать *семантическую паутину* — распределённую базу знаний. Для этого в веб-страницы нужно будет добавить специальную смысловую информацию, понятную компьютерным системам (так называемые *метаданные*).

Игровые стратегии

Как вы уже знаете из § 6, игровые модели — это модели, которые описывают соперничество двух (или более) сторон, каждая из которых стремится к выигрышу, т. е. преследует свою цель. Часто цели участников противоречивы — выигрыш одного означает проигрыш других.

Построением и изучением игровых моделей занимается **теория игр** — раздел прикладной математики. Задача состоит в том, чтобы найти **стратегию** (алгоритм игры), который позволит тому или другому участнику получить наибольший выигрыш (или, по крайней мере, наименьший проигрыш) в предположении, что соперники играют безошибочно.

Во многих простых играх, в которых игроки ходят по очереди, есть не так много вариантов развития событий, и их можно рассмотреть полностью, однозначно определив, кто выиграет в заданной начальной ситуации, если оба соперника не будут ошибаться.

Все **позиции** (игровые ситуации) делятся на выигрышные и проигрышные. **Выигрышная позиция** — это такая позиция, в которой игрок, делающий первый ход, может гарантированно выиграть при любой игре соперника, если сам не сделает ошибку. При этом говорят, что у него есть **выигрышная стратегия** — алгоритм выбора очередного хода, позволяющий ему выиграть.

Если игрок начинает играть в **проигрышной позиции**, он обязательно проиграет, если ошибку не сделает его соперник. В этом случае говорят, что у него нет выигрышной стратегии. Таким образом, общая стратегия игры состоит в том, чтобы своим ходом создать проигрышную позицию для соперника.

Выигрышные и проигрышные позиции можно охарактеризовать так:

- позиция, из которой все возможные ходы ведут в выигрышные позиции, — *проигрышная*;
- позиция, из которой хотя бы один из возможных ходов ведёт в проигрышную позицию, — *выигрышная*, при этом стратегия игрока состоит в том, чтобы перевести игру в эту проигрышную (для соперника) позицию.

Для примера рассмотрим игру с камнями, в которой участвуют два игрока. Вначале перед игроками лежит куча из некоторого количества камней (обозначим его S). За один ход игрок может добавить в кучу один камень (ход «+1») или увеличить количество камней в куче в два раза (ход «*2»). Например, имея кучу из 5 камней, за один ход можно получить кучу из 6 или 10 камней. У каждого игрока есть неограниченное количество камней. Победителем считается игрок, первым получивший кучу, в которой 14 камней или больше.

Рассмотрим возможный результат игры при разном начальном количестве S камней в куче. Очевидно, что при $S > 6$ первый игрок (т. е. игрок, делающий первый ход) выигрывает сразу, удвоив число камней в куче. Начнём заполнять таблицу, в которой для каждого значения S будем указывать, выигрышная это позиция или проигрышная, и через сколько ходов завершается игра:

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
							$В_1$	$В_1$	$В_1$	$В_1$	$В_1$	$В_1$	$В_1$

Здесь «$В_1$» обозначает выигрыш за один ход.

При $S = 6$ у первого игрока есть два хода: ход «+1» даёт кучу из 7 камней, а ход «*2» — кучу из 12 камней. Выиграть за один ход он не может, оба возможных хода ведут в выигрышные (для второго!) позиции, поэтому первый игрок проиграет, если второй не ошибётся. Позицию $S = 6$ отметим в таблице как «$х_1$» (проигрыш за 1 ход):

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
						$х_1$	$В_1$	$В_1$	$В_1$	$В_1$	$В_1$	$В_1$	$В_1$

Вспомним, что задача игрока — перевести игру в проигрышную для соперника позицию. Если $S = 5$ или $S = 3$, первый игрок может получить (ходом «+1» или «*2» соответственно) кучу из 6 камней, т. е. создать проигрышную позицию. Этого достаточно для выигрыша, но выиграть можно только за 2 хода:

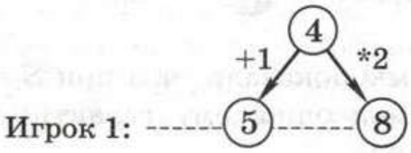
S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
			$В_2$		$В_2$	$х_1$	$В_1$	$В_1$	$В_1$	$В_1$	$В_1$	$В_1$	$В_1$

Рассуждая аналогично, выясняем, что позиция $S = 4$ — проигрышная, так как возможные ходы ведут в выигрышные позиции (соперник выиграет за 1 или за 2 хода). При $S = 2$ первый игрок может своим ходом «*2» перевести игру в проигрышную позицию ($S = 4$), поэтому он выиграет. А при $S = 1$ он проиграет, потому что может своим ходом получить только кучу из 2 камней:

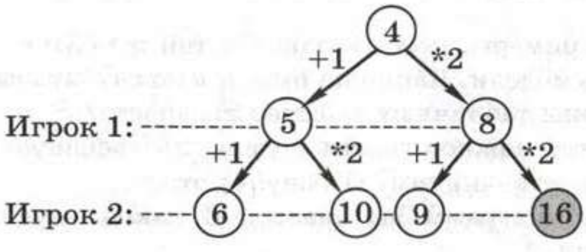
S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	х_3	В_3	В_2	х_2	В_2	х_1	В_1	В_1	В_1	В_1	В_1	В_1	В_1

Полученная таблица показывает результат игры первого игрока в том случае, если второй не будет ошибаться. Если игра начинается в проигрышной позиции, первый игрок проиграет, а если в выигрышной — его стратегия состоит в том, чтобы на каждом шаге своим ходом создавать проигрышную позицию для соперника.

Для полного исследования всех вариантов игры можно построить дерево, содержащее все возможные ходы. Предположим, что сначала в куче 4 камня (эта позиция будет корнем дерева). Тогда в результате первого хода может получиться куча из 5 или 8 камней:

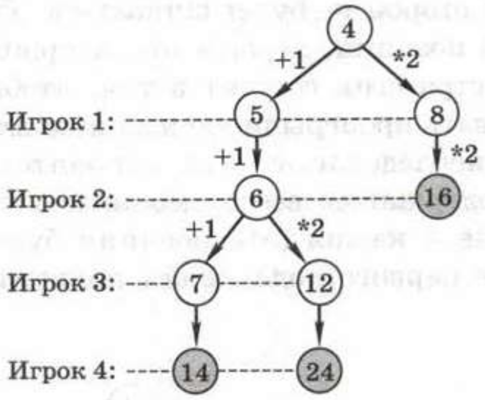


Следующий уровень дерева показывает все возможные позиции после ответного хода второго игрока:



Мы видим, что второй игрок может выиграть своим первым ходом (получив 16 камней), если первый построит кучу из 8 камней. В остальных случаях игра продолжается, и дерево можно строить дальше по тому же принципу.

Как мы уже показали ранее с помощью таблицы, при $S = 4$ выигрывает второй игрок. Чтобы доказать это с помощью дерева, не нужно строить полное дерево игры. Достаточно рассмотреть все возможные ходы соперника и для каждого из них найти один (!) выигрышный ход второго игрока. Вариант с выигрышем в один ход мы уже разобрали, теперь посмотрим, что произойдёт, если первый игрок получит кучу из 5 камней. Как следует из построенной выше таблицы, для кучи из 5 камней выигрышный ход второго игрока — «+1», он переводит игру в проигрышную позицию. При любом ответе первого игрока второй выигрывает своим вторым ходом «*2»:



Таким образом, мы доказали, что при $S = 4$ у второго игрока есть стратегия, позволяющая ему гарантированно выиграть, по крайней мере, за 2 хода.